Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 3

31 de octubre de 2023

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

8823 – 7223

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 28]

En esta pregunta se utilizan ecuaciones diferenciales para modelizar la velocidad máxima de un paracaidista en caída libre.

En el año 2012, Felix Baumgartner saltó desde una altura de $40\,000\,\mathrm{m}$. Con ello trataba de alcanzar la velocidad del sonido ($330\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) mientras se dirigía en caída libre hacia la superficie terrestre.

Antes de intentarlo, Felix utilizó modelos matemáticos para analizar lo realista que sería este intento. El modelo más sencillo que utilizó sugería que

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$$

donde $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ es la velocidad de Felix y $g\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ es la aceleración debido a la gravedad. El tiempo transcurrido desde el inicio de la caída libre es t segundos y el desplazamiento respecto a su posición inicial es s metros.

A lo largo de esta pregunta, se considera que la dirección hacia el centro de la Tierra es positiva y v es una cantidad positiva.

Cuando $s = 0$, se sabe que Felix salta con una velocidad inicial $v = 10$.

(a) (i) Utilice la regla de la cadena para mostrar que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$. [1]

(ii) Suponiendo que g es una constante, resuelva la ecuación diferencial $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = g$ para hallar v en función de s. [4]

(iii) Utilizando $g = 9{,}8$, determine si el modelo predice que Felix conseguirá (o no) alcanzar la velocidad del sonido en algún momento, antes de que $s = 40\,000$. Justifique su respuesta. [3]

(b) Para comprobar la validez del modelo

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\ ,$$

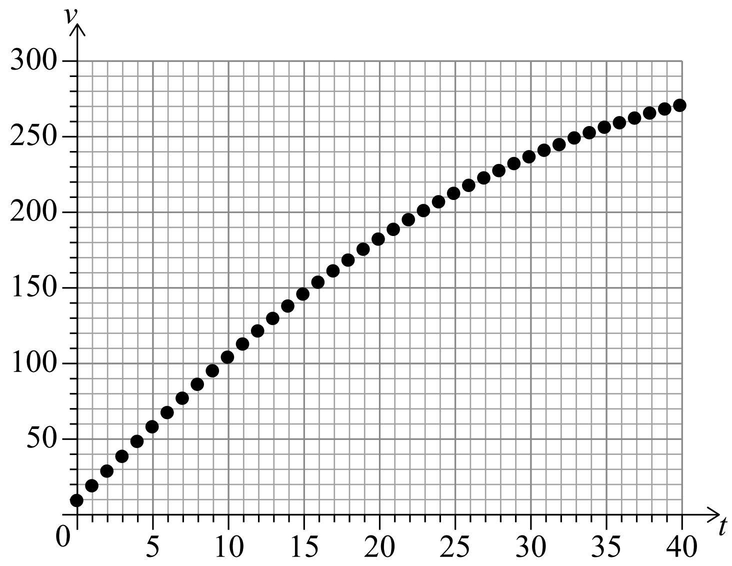
Felix hizo un salto de prueba desde una altura menor y se registraron los datos de v en función de t.

(i) Si el modelo es correcto, describa la forma que tendrá el gráfico de v en función de t. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Los datos de Felix se han representado en el siguiente gráfico.



(ii) Utilice el gráfico para comentar sobre la validez del modelo del apartado (a). [1]

(c) Hay un modelo mejorado que tiene en cuenta la resistencia del aire, según

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv^2$$

donde k es una constante positiva. Le recordamos que, al inicio, $s = 0$ y $v = 10$.

(i) Utilizando $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$, resuelva la ecuación diferencial para hallar v en función de s, g y k. Puede suponer que $g - kv^2 > 0$. [5]

Felix utiliza el gráfico de v en función de t del apartado (b) para estimar el valor de k.

(ii) La pendiente se estima que es igual a $9{,}672$ cuando $v = 40$. Considerando g igual a $9{,}8$, utilice esta información para mostrar que el valor que obtiene Felix es $k = 8 \times 10^{-5}$. [2]

(iii) A partir de lo anterior, halle el valor de v que predice este modelo cuando s tiende a infinito. [2]

(iv) Halle el límite superior de la velocidad según este modelo, y sabiendo que $0 < s \leq 40\,000$. Dé la respuesta redondeando a cuatro cifras significativas. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

La suposición de que el valor de g es constante no es correcta. Se puede demostrar que

$$g = \frac{3{,}98 \times 10^{14}}{\left(6{,}41 \times 10^{6} - s\right)^{2}}.$$

Por consiguiente, el nuevo modelo viene dado por

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{3{,}98 \times 10^{14}}{\left(6{,}41 \times 10^{6} - s\right)^{2}} - \left(8 \times 10^{-5}\right)v^{2}.$$

Cuando $s = 0$, se sabe que $v = 10$.

(d) Utilice el método de Euler con un paso de 4000 para estimar el valor de v cuando $s = 40\,000$. [4]

(e) Después de que Felix completara su salto récord, observó que la respuesta del apartado (d) no concordaba con los datos que había recogido durante el salto.

(i) Sugiera **una** mejora en el uso del método de Euler, con la que pueda aumentar la precisión de la predicción que hace el modelo. [1]

(ii) Sugiera **un** factor —que el modelo del apartado (d) **no** tenga en cuenta explícitamente— que pudiera provocar esa diferencia entre la predicción del modelo y los datos recogidos. [1]

2. [Puntuación máxima: 27]

Esta pregunta trata de aplicar ideas de logaritmos, cálculo y la probabilidad a una teoría matemática poco conocida denominada teoría de la información.

Claude Shannon desarrolló una teoría matemática llamada teoría de la información para medir la información que se obtiene cuando se producen sucesos aleatorios. El definió la información, I, que se obtiene cuando se produce un suceso con probabilidad p de la siguiente manera

$$I = -\ln p$$

donde $0 < p \leq 1$. Por ejemplo, no se obtiene ninguna información ($I = 0$) cuando es seguro que el suceso se vaya a producir ($p = 1$).

(a) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $I = -\ln p$, para $0 < p \leq 1$, rotulando todos los puntos de corte con los ejes y todas las asíntotas que haya. [3]

(ii) Utilizando el cálculo, muestre que I es una función decreciente de p. [3]

(iii) Interprete lo que significa que "I es una función decreciente de p" en el contexto de la pregunta. [1]

(b) Una computadora elige al azar un número entero (x) del 1 al 10, ambos inclusive. Cada resultado tiene la misma probabilidad.

Alessia está tratando de determinar el valor de x y pregunta si x es impar.

(i) Escriba la probabilidad de que x sea impar. [1]

(ii) A Alessia le dicen que x es impar. Halle cuánta información obtiene Alessia con esa respuesta. [2]

A continuación, la computadora elige al azar un número entero (y) del 1 al 10, ambos inclusive. Cada resultado tiene la misma probabilidad.

Daniel está tratando de determinar el valor de y, y pregunta si y es 7. Le dicen que no es 7.

(iii) Halle cuánta información obtiene Daniel con esa respuesta. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Si una variable aleatoria tiene n resultados posibles con probabilidades $p_1, p_2 \ldots p_n$, en ese caso la información esperada que se obtiene, $\mathrm{E}(I)$, se define así

$$\mathrm{E}(I) = \sum_{r=1}^{n} -p_r \ln p_r\,.$$

(c) Para el juego de adivinar números enteros descrito en el apartado (b), cuando Daniel pregunta si y es 7, hay dos resultados posibles: "y es 7" o "y no es 7".

(i) Muestre que la información esperada que obtiene Daniel es $0{,}325$, redondeando a tres cifras significativas. [2]

(ii) Alessia pregunta si x es impar. Muestre que su información esperada que obtuvo es mayor que la información esperada que obtuvo Daniel. [2]

La teoría de la información se puede aplicar a muchas situaciones diversas.

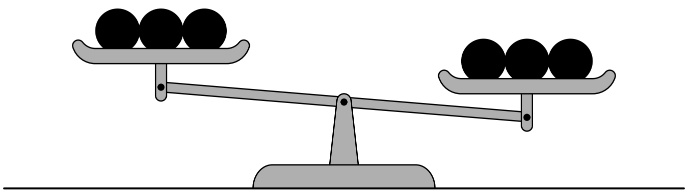
(d) Cuando se lanza una moneda al aire, el resultado es cara o cruz. La moneda puede estar trucada. Sea p la probabilidad de que el resultado sea cara.

(i) Halle, en función de p, la información que se obtiene cuando el resultado es cruz. [1]

(ii) Halle, en función de p, la información esperada que se obtiene cuando la moneda se lanza una vez. [1]

(iii) A partir de lo anterior, halle el valor de p cuando la información esperada que se obtiene se maximiza. [2]

En un famoso acertijo se utilizan 12 bolas que parecen idénticas. De ellas, 11 pesan lo mismo pero hay una que pesa más o menos que las otras. Una balanza de dos brazos se puede utilizar repetidamente para comparar los pesos de distintas combinaciones de bolas.



El resultado de cada pesada puede ser "equilibrada", "el lado de la izquierda pesa más" o "el lado de la derecha pesa más". El objetivo del acertijo es identificar la bola que tiene un peso distinto y determinar si pesa más o menos que las otras, y hacerlo en el menor número de pesadas posible.

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

(e) Angela quiere decidir cuántas bolas deberían compararse entre sí en la **primera pesada**. Para planificar mejor su estrategia, decide elaborar la siguiente tabla.

Número de bolas que hay en cada lado	**Probabilidad de que esté equilibrada**	**Probabilidad de que el lado izquierdo pese más**	**Probabilidad de que el lado derecho pese más**	**Información esperada, $\mathrm{E}(\boldsymbol{I})$ (3 cifras decimales)**
1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0,566
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\boldsymbol{z}$
3	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{y}$	1,040
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1,099
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	1,028
6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,693

(i) Halle el valor de x. Justifique su respuesta. [2]

(ii) Halle el valor de y. [2]

(iii) Halle el valor de z. [2]

(iv) Utilice la tabla para sugerirle a Angela cuál es la mejor opción para la primera pesada. Justifique su respuesta. [1]